Méthode d'étude de la probabilité d'apparition d'angles remarquables dans un complexe mégalithique

Version 2.0 – mars 2017

Introduction

Situation initiale :
Suite au relevé des positions géographiques d'un certain nombre de mégalithes, nous avons mesuré tous les angles formés par les doublets de mégalithes avec l'axe nord-sud. Parmi les angles mesurés, nous avons remarqué que plusieurs correspondent à des angles dits « remarquables » (nous reviendrons sur la définition du terme plus tard).

Problématique :
Devant ce constat, nous souhaiterions savoir si le nombre d'angles remarquables observés est potentiellement du au hasard. Autrement dit, nous souhaiterions savoir si un nombre équivalent de mégalithes disposés de manière totalement aléatoire présenterait autant d'angles remarquables ou non. Si ça n'est pas le cas, nous pourrions en déduire que la disposition des mégalithes étudiés n'est pas aléatoire mais s'inscrit dans une logique de construction à grande échelle.

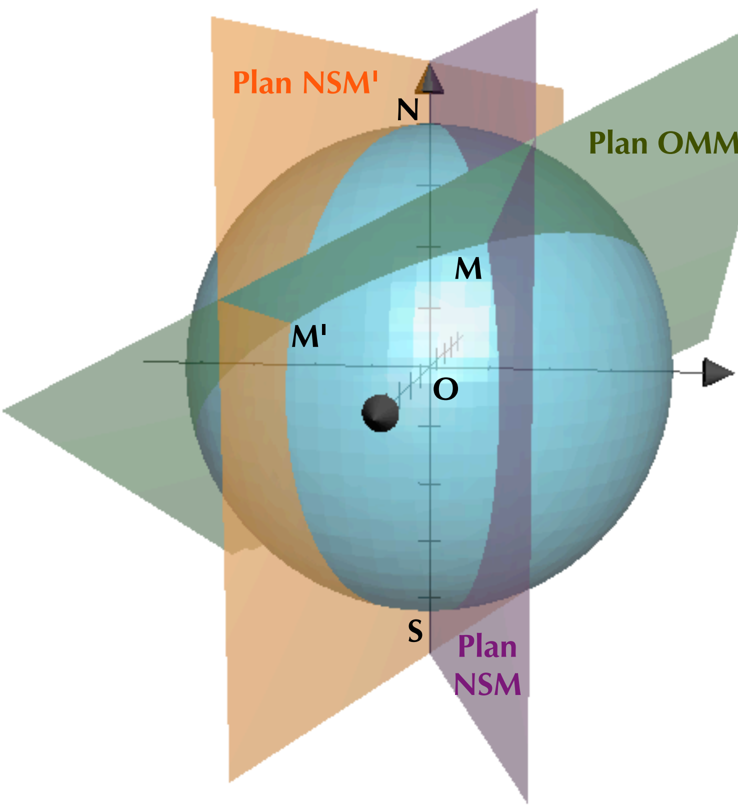
But du document :
Ce document va chercher à résoudre mathématiquement la problématique pour un cas quelconque et à démontrer puis établir des formules applicables à tous les cas particuliers que l'on souhaitera étudier. Il servira donc de référence à d'autres documents, leur permettant de passer plus rapidement sur la partie théorique, sans avoir à la redémontrer systématiquement.

Etude la problématique

A première vue, il existe un angle mesurable pour chaque doublet de mégalithes différents. En effet, chaque doublet permet de tracer une droite, et on mesure alors l'angle qu'elle forme avec l'axe nord-sud. En réalité, la chose n'est pas aussi simple, car la Terre n'est pas plate, mais ronde ! Lorsqu'on cherche à mesurer l'angle que forment deux mégalithes par rapport à l'axe nord-sud, il ne s'agit pas de mesurer l'angle entre deux droites, mais entre deux arcs de cercle. Pour résoudre ce problème, deux solutions sont possibles :

1) Utiliser une géométrie non-euclidienne, la géométrie sphérique : en négligeant l'altitude, on peut assimiler la Terre à une sphère et calculer les angles dans un repère sphérique. Une telle solution n'est pas évidente à mettre en place car nous avons l'habitude de raisonner avec la géométrie euclidienne.

2) Utiliser la géométrie euclidienne en trois dimensions : si on place la Terre dans un repère à trois dimensions, on peut définir les coordonnées des deux mégalithes. Si on appelle M et M' les deux points correspondants, O le centre de la Terre, N le pôle nord et S le pôle sud, on se rend compte qu'il existe deux manières différentes de définir l'angle que forment deux mégalithes par rapport à « l'axe » nord-sud. On peut soit calculer l'angle formé par les plans OMM' et NSM, soit calculer l'angle formé par les plans OMM' et NSM'. La figure suivante illustre cette explication.



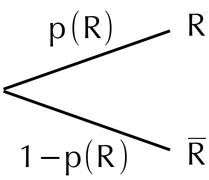
Cette seconde solution montre qu'il n'existe pas un angle par doublet de mégalithes différents, mais deux. Ainsi, pour chaque doublet étudié, on considérera que l'expérience est un succès si au moins un des deux angles est un angle remarquable.

Chacune de ces expériences peut alors être assimilée à une épreuve de Bernoulli, c'est à dire à une épreuve à seulement deux issues :

- sucés de l'épreuve (au moins un angle mesuré parmi les deux est remarquable) ;
- échec de l'épreuve (aucun des deux angles mesurés n'est remarquable).

Nous appellerons R la première issue et $\overline{R}$ la seconde.

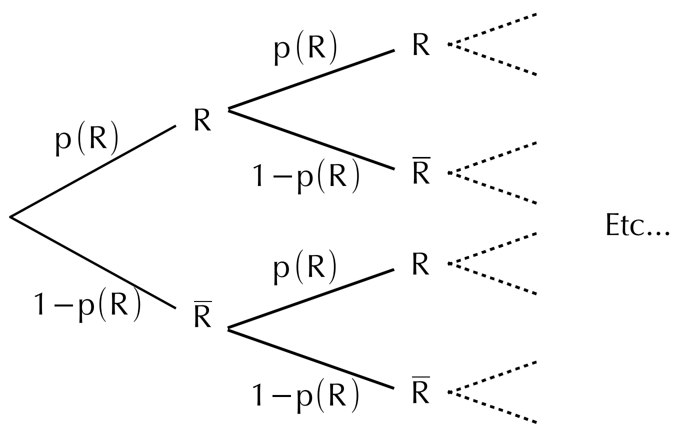
Cette situation est représentée par l'arbre pondéré ci-dessous.



Toutes ces expériences sont indépendantes, car le résultat d'une expérience donnée n'est pas affecté par les résultats des expériences qui l'ont précédée. Autrement dit, mesurer un angle qui s'avère remarquable lors d'une expérience ne change en rien la probabilité qu'un de ceux qu'on mesurera lors d'une expérience prochaine le soit aussi. Comme quand on joue à pile ou face, ça n'est pas parce qu'on fait pile une fois qu'on aura moins de chance de faire pile la fois d'après, la probabilité restera ½.

On en conclut que notre série de mesures peut être apparentée à un schéma de Bernoulli, c'est-à-dire à la répétition d'un certain nombre (noté « n ») d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Cette situation est représentée par un arbre pondéré dont on donne le début ci-après.



L'arbre pondéré entier aurait n niveaux : un pour chaque expérience réalisée.

Pour étudier les probabilités dans un schéma de Bernoulli, on utilise la Loi Binomiale (à ne pas confondre avec la Loi Hypergéométrique, plus complexe, qui s'utilise quand les épreuves de Bernoulli successives ne sont pas indépendantes les unes des autres). Nous allons voir en quoi consiste cette loi.

Loi Binomiale

Intérêt de la Loi Binomiale :
Cette loi permet de calculer la probabilité qu'un certain nombre de succès (noté « k ») se produisent dans un schéma de Bernoulli, c'est-à-dire lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques. *Des notions basiques de probabilités (niveau 3ème) sont nécessaires à sa compréhension.*

Explication du fonctionnement de la Loi Binomiale :
1) On calcule le nombre d'issues dans l'arbre qui réalisent k succès parmi n tentatives.
2) Toutes ces issues ont la même probabilité : la probabilité de succès (p) multipliée autant de fois que le nombre de succès (n), multipliée par la probabilité d'échec (1 – p) multipliée autant de fois que le nombre d'échecs (n – k).
3) On multiplie cette probabilité par le nombre d'issues calculée au (1).

Fonctionnement mathématique de la loi binomiale :

1) Nombre d'issues dans l'arbre qui réalisent k succès parmi n tentatives : $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$
Cette opération s'appelle une combinaison.
Une calculatrice sait la réaliser sans passer par les opérateurs factoriels (!).

2) Toutes ces issues ont la même probabilité : $p^k(1-p)^{(n-k)}$

3) La probabilité qu'une variable aléatoire (notée « X ») égale k succès se note P(X = k).
On a donc : $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{(n-k)}$

Application dans le cadre de notre étude :
Si on considère que p est la probabilité qu'au moins un des deux angles soit remarquable lors d'une mesure sur un doublet de mégalithes, que n est le nombre de doublets de mesures réalisés lors de notre étude et que k est le nombre de doublets de mesures lors desquels on a identifié au moins un angle remarquable, alors nous sommes capables, une fois ces paramètres établis, de calculer la probabilité qu'une telle situation se produise si les mégalithes étaient disposées aléatoirement.

Remarque sur la méthode d'application de la loi binomiale dans notre cas :

La Loi Binomiale telle que nous venons de la décrire va calculer la probabilité de réaliser exactement k succès. Il serait plus juste de calculer la probabilité de réaliser au moins k succès. En effet, lorsque parmi nos doublets de mesures, k nous ont permis de trouver au moins un angle remarquable, la question que l'on se pose n'est pas « Quelles étaient les chances pour que je trouve ce nombre de précis d'angles remarquables ? » mais plutôt « Quelles étaient les chances pour que je trouve autant d'angles remarquables ? ». Autrement dit, « Quelles étaient les chances pour que je trouve au moins ce nombre d'angles remarquables ? ».
Mathématiquement, cela se traduit par le remplacement de $P(X = k)$ par $P(X \geq k)$, ce qui influence la méthode de calcul :

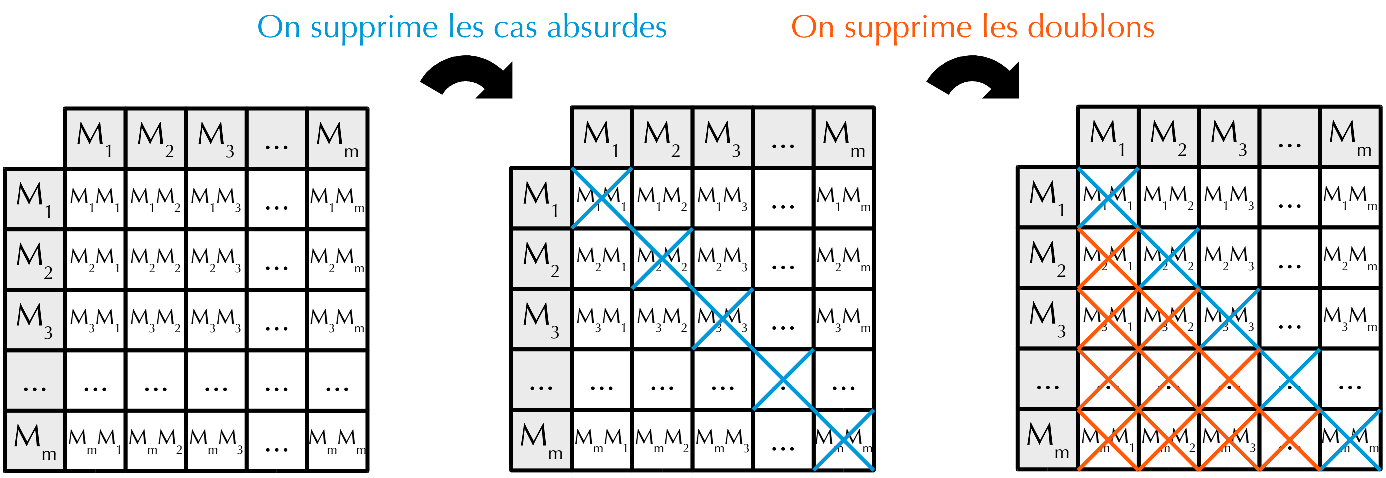
$$
\begin{aligned}
P(X \geq k) &= 1 - P(X < k) \\
&= 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + \ldots + P(X=k)) \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{k} P(X=i) \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{(n-i)}
\end{aligned}
$$

Avec cette nouvelle méthode, nous pouvons calculer la probabilité de trouver au moins k angles remarquables. Pour la mettre en œuvre, on peut utiliser une calculatrice capable de calculer les sommes itératives ou plus simplement un logiciel de calcul (Xcas, WolframAlpha...) ou un tableur.

Nous allons maintenant voir comment déterminer les différents paramètres de la formules (n, p et k).

Détermination du paramètre « n »

Le n correspond au nombre de doublets de mesures réalisés. Il peut être calculé à partir du nombre de mégalithes étudiés, qu'on notera « m ». Ce calcul fait appel aux bases de la théorie des graphes, en posant la question : si on dispose de m points que l'on souhaite tous relier entre eux, combien doit-on tracer de traits ? Il est facile de répondre à cette question avec un tableau à double entrée :



Nombre de cases = m^2 Nombre de cases = m^2 **– m** Nombre de cases = $(m^2$ **– m)/2**

Le nombre de doublets en fonction du nombre de mégalithes (m) est donc de **$(m^2 – m)/2$**, ou, si on factorise, **$n = m(m – 1)/2$**

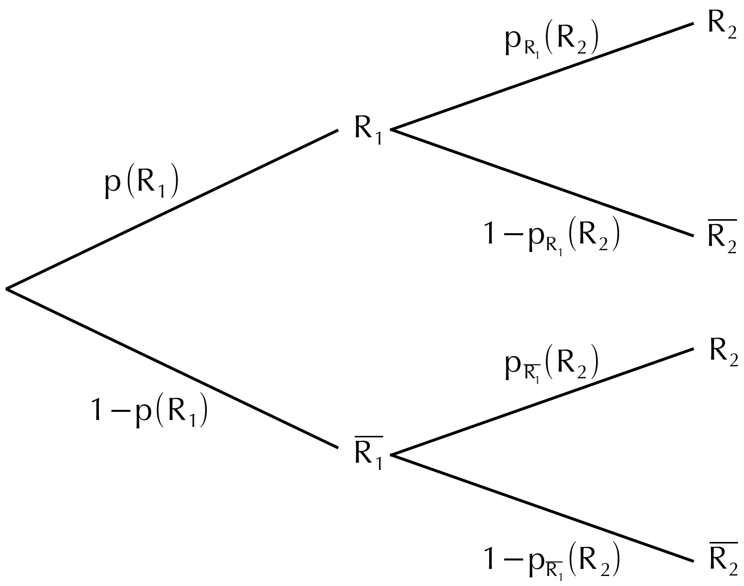
Détermination du paramètre « p »

Définition et méthode de calcul de p :

Le p correspond à la probabilité qu'au moins un angle soit remarquable lors de la mesure d'un doublet d'angles. Elle était noté p(R) au début du document, mais par commodité nous pourrons abréger son écriture. Elle se calcule à partir de l'arbre de probabilité suivant, pour lequel on définit :

- R_1 l'évènement « le premier angle mesuré est remarquable » ;
- R_2 l'évènement « le second angle mesuré est remarquable ».

On utilise aussi la notation $p_A(B)$: « probabilité que B se réalise sachant que A s'est réalisé ».



Si on définit R en fonction de R_1 et R_2 on peut dire que R est « R_1 ou R_2 ».

$$\begin{aligned} p(R) &= p(R_1 \cup R_2) \\ &= p(R_1) + p(\overline{R_1} \cap R_2) \\ &= p(R_1) + [1 - p(R_1)].p_{\overline{R_1}}(R_2) \end{aligned}$$

$p_{\overline{R_1}}(R_2)$, qui est la probabilité que la mesure du second angle soit remarquable si celle du premier ne l'est pas, peut simplement être considérée comme égale à $p(R_1)$. En effet, si le premier angle mesuré n'est pas remarquable, il n'y a pas de raison pour que ce résultat influence la probabilité de succès de la seconde mesure. On a alors :

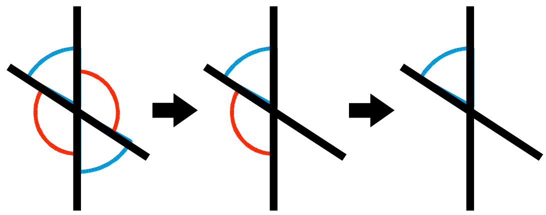
$$\begin{aligned} p(R) &= p(R_1) + [1 - p(R_1)].p(R_1) \\ &= [1 + 1 - p(R_1)].p(R_1) \\ &= p(R_1).[2 - p(R_1)] \end{aligned}$$

Ainsi, pour connaître p, il nous faut trouver $p(R_1)$. Elle se calcule en divisant le nombre d'angles considérés comme remarquables (noté « r ») par le nombre d'angles mesurables (noté « a »).

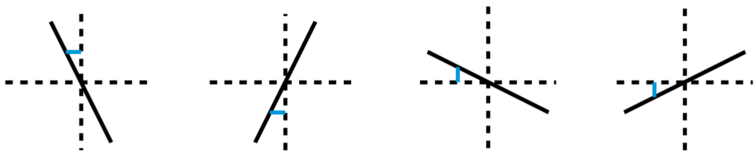
Détermination de a, le nombre d'angles mesurables :

En théorie, un angle est un nombre réel compris entre 0 et 360 (si on le mesure en degrés). Il peut donc prendre une infinité de valeurs. En pratique, il va nous être impossible de mesurer toute les décimales de l'angle, car on ne peut jamais avoir une précision de mesure aussi grande que l'on veut. Cette précision (notée « δ ») devra donc être choisie à l'avance (par exemple 1/10 de degré ou 1/100 de degré). Elle va fixer le nombre de décimales des angles mesurés, et le nombre de mesures possibles va donc devenir fini et calculable.

Le second paramètre à connaître est la plage de mesure, c'est à dire les angles minimum et maximum que l'on va mesurer. Lorsque deux droites ou deux plans se coupent, ils forment géométriquement quatre angles. Ses angles étant égaux deux à deux, on peut commencer par n'en considérer que deux. Toutefois, on ne retiendra que le plus petit pour caractériser l'angle (figure de droite).

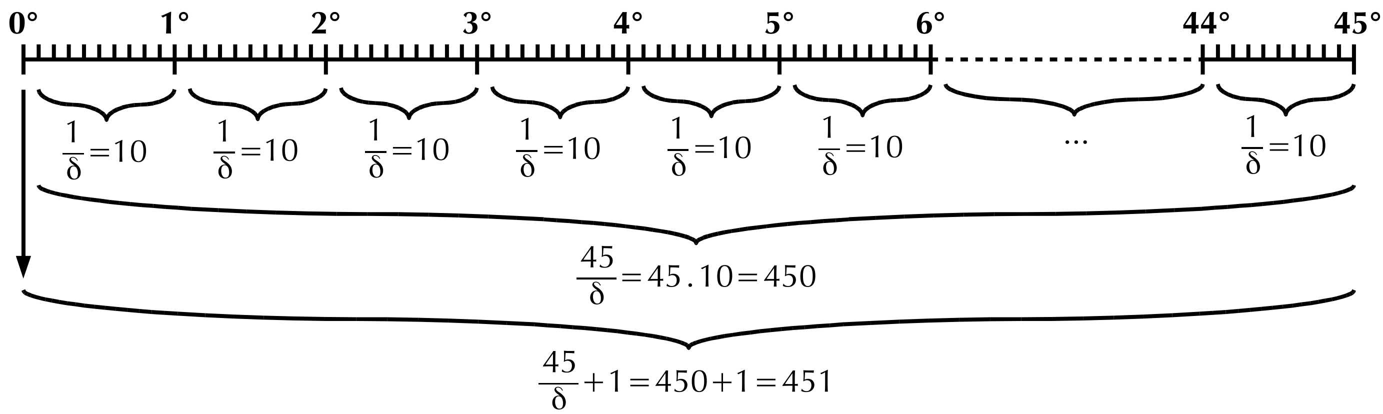


Comme dans le cadre de cette étude nous ne nous intéressons pas à l'orientation (positive ou négative) de l'angle, et qu'il nous aussi égal de savoir si l'angle remarquable se trouve entre l'alignement des mégalithes et l'axe Nord-Sud ou entre l'alignement et l'axe Est-Ouest, nous considèrerons comme équivalents les quatre cas suivants :



On ne mesurera donc pas des angles compris entre 0 et 360° mais entre 0 et (360 / 2 / 4)° c'est-à-dire entre 0 et 45°.

Le nombre d'angles mesurables « a » peut maintenant être déterminé : pour chaque degré, il y aura autant d'angles mesurables que l'inverse de la précision. On ajoutera 1 au tout pour prendre en compte l'angle 0°. La figure ci-dessous illustre ces propos pour δ = 1/10.



On en conclut que le nombre d'angles mesurables est donné par la formule : $a=\frac{45}{\delta}+1$

 Pierre Coussy - 2017

Détermination de r, le nombre d'angles remarquables :

Avant de pouvoir en déterminer le nombre, il nous faut définir ce que l'on entend par « remarquable ». Un angle sera qualifié de remarquable s'il est en lien avec l'architecture sacrée. Il convient de rechercher en priorité ce qui est le plus simple, c'est à dire des angles formés par des figures géométriques élémentaires à base de carrés modulaires. Il n'est donc pas judicieux de rechercher des angles formés par des structures dépassant les 10 chiffres que comporte la base 10.

Sera donc considéré comme remarquable un angle :

- nul ; 0°
- droit ; 90°
- égal à l'angle formé par la base et la diagonale d'un carré ; 45°
- égal à l'angle formé par la base et la diagonale d'un rectangle constitué :
  - d'une suite de 2 carrés ; 26,56°
  - d'une suite de 3 carrés ; 18,43°
  - d'une suite de 4 carrés ; 14,04°
  - d'une suite de 5 carrés ; 11,31°
  - d'une suite de 6 carrés ; 9,46°
  - d'une suite de 7 carrés ; 8,13°
  - d'une suite de 8 carrés ; 7,12°
  - d'une suite de 9 carrés ; 6,34°
- égal à l'angle formé par la base et la diagonale d'un rectangle :
  - de proportions 2/3 ; 33,69°
  - de proportions 3/5 ; 30,96°
  - de proportions 4/5 ; 38,66°
  - de proportions 5/7 ; 35,54°
- égal à l'angle formé par la base et l'hypoténuse d'un triangle rectangle :
  - de dimensions 3 – 4 – 5 ; 36,87°
  - de dimensions 5 – 12 – 13 ; 22,62°
  - de dimensions 7 – 24 – 25 ; 16,26°

La colonne de valeur ci-dessus à droite donne une idée des valeurs des angles dont il est question, arrondies au centième de degré. On pourra donc considérer environ 21 angles comme remarquables. Il n'est pas exclu que ce chiffre varie selon le sujet de l'étude, mais jamais dans des proportions trop importantes.

Détermination de $p(R_1)$, la probabilité que le premier angle mesuré soit remarquable :

Comme nous l'avions précédemment défini, $p(R_1)=\frac{r}{a}$

Les études de r et a étant faites, on conclut que $p(R_1)=\frac{r}{\frac{45}{\delta}+1}$ ou si on préfère, $p(R_1)=\frac{r\delta}{45+\delta}$

Détermination de p, la probabilité qu'au moins un des deux angles d'un doublet soit remarquable :

$$p=p(R_1).[2-p(R_1)]$$

$$\mathbf{p=\frac{r\delta}{45+\delta}\left(2-\frac{r\delta}{45+\delta}\right)}$$

Détermination du paramètre « k »

Le k correspond au nombre d'angles remarquables trouvés lors de la série de mesures, donc il ne se calcule pas, il se constate, tout simplement. Il suffit pour cela de comparer tous les angles mesurés avec les angles considérés comme remarquables et de compter dans combien de doublets de mesures apparaissent des angles remarquables, en tenant compte de la précision δ choisie pour l'étude.

Mise en oeuvre de la Loi Binomiale

Résumé des formules :
Nous venons de démontrer les trois formules suivantes :

$$P(X \geq k) = 1 - \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^{i} (1-p)^{(n-i)}$$

$$n = \frac{m(m-1)}{2}$$

$$p = \frac{r\delta}{45+\delta}\left(2 - \frac{r\delta}{45+\delta}\right)$$

Conclusion :

$$P(X \geq k) = 1 - \sum_{i=0}^{k} \binom{\frac{m(m-1)}{2}}{i} \left(\frac{r\delta}{45+\delta}\left(2 - \frac{r\delta}{45+\delta}\right)\right)^{i} \left(1 - \frac{r\delta}{45+\delta}\left(2 - \frac{r\delta}{45+\delta}\right)\right)^{\left(\frac{m(m-1)}{2} - i\right)}$$

k : le nombre de doublets de mesures dans lesquels apparaissent au moins un angle remarquable
m : le nombre de mégalithes du complexe étudié
r : le nombre d'angles remarquables pris en compte dans l'étude
δ : la précision choisie pour l'étude (en degrés)

Cette formule peut être mise en œuvre pour n'importe quel étude similaire à celle décrite en introduction. Il suffit juste de choisir les valeurs appropriées pour les quatre paramètres décrits.

Remarque :
Puisqu'avec ces nombreux paramètres, la formule est complexe à utiliser, un tableur a été créé pour la mettre en œuvre de manière totalement automatique en entrant simplement les coordonnées GPS des sites à prendre en compte dans l'étude, la précision angulaire, le rayon terrestre moyen dans la zone concernée par l'étude, ainsi que les angles devant êtres considérés comme remarquables.